

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2 (Klausur SS00)

Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung sinnvoll?

$$y = \frac{(x+1)^2 + 2}{\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{Binom: } (x+1)^2} + 1} = \frac{\overbrace{(x+1)^2 + 1 + 1}^{\text{siehe Nenner}}}{\underbrace{(x+1)^2 + 1}_{\text{Nenner}}} = \underbrace{\frac{(x+1)^2 + 1}{(x+1)^2 + 1}}_1 + \frac{1}{(x+1)^2 + 1} = \boxed{1 + \frac{1}{\underbrace{1 + (x+1)^2}_{\neq 0}}}$$

Wie in den vorigen Aufgaben (vgl. **ü1**) haben wir uns zunächst daran gemacht die Gleichung in eine Summe einfacherer Ausdrücke zu zerlegen.

Einschränkungen bezüglich der Inputvariablen x wären nur dann nötig, wenn einer der beiden Summanden „Ärger machen würde“. Das einzige „ärgerliche“ Ereignis, welches eintreten könnte, wäre eine Null im Nenner des zweiten Summanden. Da dieser jedoch stets echt größer Null ist, ist die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ sinnvoll.

Es besteht weiterhin „kein Grund zur Veranlassung“ für y irgendwelche Werte außen vor zu lassen. Wir belassen es also vorerst bei $y \in \mathbb{R}$.

Umstellung der Gleichung nach x

$$y = 1 + \frac{1}{1 + (x+1)^2}$$

$$y - 1 = \frac{1}{1 + (x+1)^2}$$

$$\underbrace{1 + (x+1)^2}_{\geq 1} = \frac{1}{y-1} \quad \boxed{y > 1}$$

$$(x+1)^2 = \frac{1}{y-1} - 1$$

$$|x+1| = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{y-1} - 1}_{\geq 0}} \quad \boxed{y \leq 2}^*$$

$$x+1 = \pm \sqrt{\frac{1}{y-1} - 1}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{y-1} - 1}$$

*Nebenrechnung

$$\frac{1}{y-1} - 1 \geq 0$$

$$\frac{1}{y-1} \geq 1$$

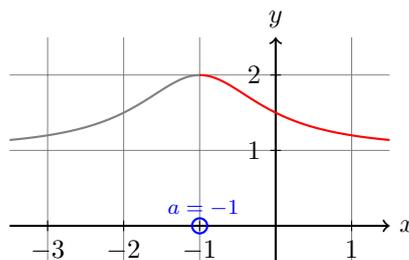
$$1 \geq y-1 \quad \boxed{y > 1}$$

$$2 \geq y$$

Übergang: Gleichung \rightarrow Funktion

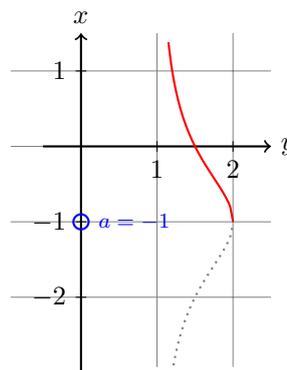
Die nachfolgende Skizze zeigt die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}$ für die die Gleichung erfüllt ist.

Da $0 \in D$ sowie Injektivität gelten soll, wählen wir $D := [-1|\infty)$. Somit zeigt der rot dargestellte Bereich die Funktion f .



Surjektiv und damit bijektiv ist die Gleichung schließlich für $W := (1|2]$.

Umkehrfunktion



Die Funktionsvorschrift für $f^{-1} : W \rightarrow D$ lautet:

$$x = f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{\frac{1}{y-1} - 1}$$