ü1 Lösungsvorschlag

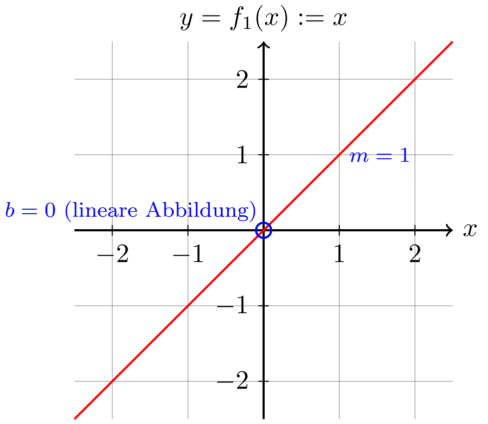
ü1.a1 f_1 und f_2

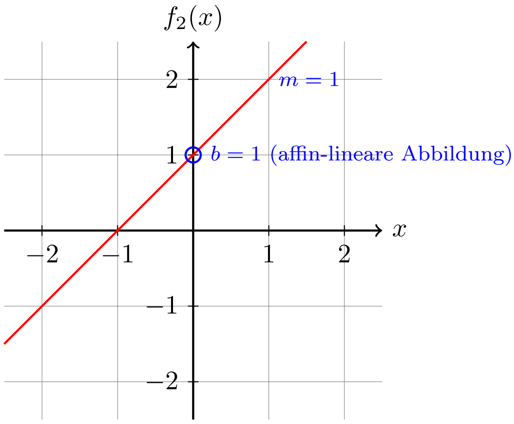
Fragestellung: Was erwarte ich? - Geradengleichung (Schule)

Wir wollen mit der Skizze der beiden Abbildungen f_1 und f_2 beginnen. Für $m, b \in \mathbb{R}$ entsprechen diese der bekannten Form

$$y = mx + b \qquad (x \in \mathbb{R},\ \text{Geradengleichung}).$$

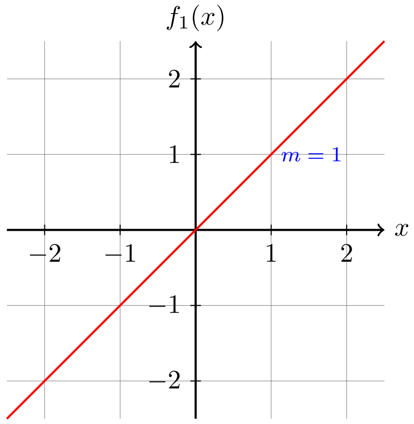
Durch die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b ist der Verlauf einer Geraden eindeutig festgelegt. Weiter kann zwischen linearen ($b = 0$) und affin-linearen Abbildungen ($b \neq 0$) unterschieden werden.

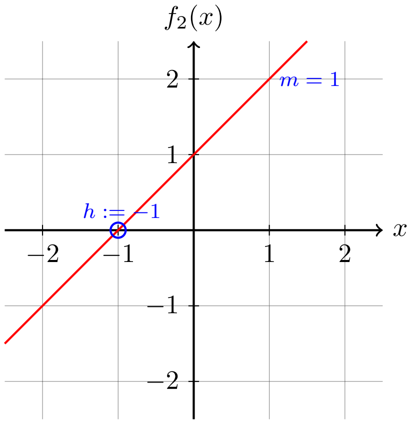




Alternative Betrachtungsweise - Horizontale Verschiebung von Funktionen

Es soll eine Beziehung zwischen den Abbildungen f_1 und f_2 herausgearbeitet werden. Bei längerer Betrachtung fällt auf, dass sich f_2 lediglich durch eine horizontale Verschiebung (d.h. entlang der x-Achse) um „-1“ von f_1 unterscheidet.





Demnach kann folgende Beziehung angeben werden:

$$f_2(x) = f_1(x - \underbrace{(-1)}_{=h}) \quad \text{bzw. allgemein} \quad f_{\text{verschoben}}(x) = f_{\text{original}}(x - h) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Diese Darstellung ist so gewählt, dass man die Verschiebung unmittelbar ablesen kann! Sie wird uns bei der Untersuchung von f_3 und f_4 noch einmal begegnen.

„Surjektivität + Injektivität = Bijektivität“

Um uns klar zu machen, welche Eigenschaften durch die „Summanden der obigen Gleichung“ beschrieben werden, betrachten wir im Folgenden die x-Achse als Input- und die $f(x)$-Achse als Outputachse der Abbildung. Erfüllt eine Abbildung die beiden nachfolgenden Kriterien, so bezeichnet man sie als bijektiv.

Surjektivität:	Zu jedem Outputwert existiert mindestens ein Inputwert.
Injektivität:	Zu jedem Outputwert existiert höchstens ein Inputwert.

Demzufolge ist eine Abbildung genau dann bijektiv, wenn zu jedem Outputwert genau ein Inputwert existiert.

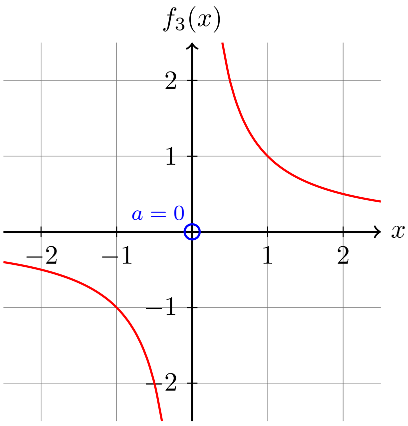
Was bedeutet dies für lineare Abbildungen?

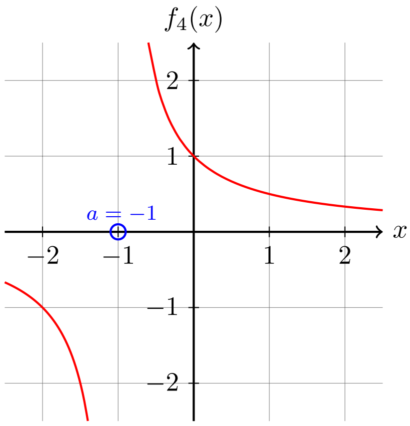
Aus den obigen Definitionen folgt, dass (affin-)lineare Abbildungen $f : \mathbb{R} \to W$ mit $W \subseteq \mathbb{R}$ stets bijektiv sind. Es folgt: f_1 und f_2 sind bijektiv.

$\boxed{\text{ü1.a1}}$ f_3 und f_4

Skizze der Funktionen

Bei f_3 und f_4 handelt es sich um Hyperbeln (Schule!). Es gilt $f_4(x) = f_3(x - (-1))$ (vgl. f_1 und f_2). Relativ zur Polstelle (=Nennernullstelle) unterscheidet sich der Funktionsverlauf von f_4 von dem der Funktion f_3 in keinem Punkt.





Beide Funktionen sind nicht surjektiv, weil sowohl W_3 als auch W_4 den Outputwert 0 enthalten, dieser aber durch keinen der Inputwerte erzeugt werden kann. Die Bedingung „höchstens einen Inputwert je Outputwert“ wird somit jedoch erfüllt, sodass beide Funktionen injektiv sind.

Mit $W'_{3,4} := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind beide Funktionen bijektiv!

$\boxed{\textbf{ü1.a2}}$ f_5

Zerlegung der Funktion

Um Funktionen dieser Bauart (ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners) skizzieren zu können, sollte man zunächst daran versuchen diese in Teilfunktionen mit bekannten Funktionsverläufen zu zerlegen. Zwar handelt es sich hier bereits um ein Produkt der Funktionen f_1 und f_4, es empfiehlt sich jedoch Funktionen (falls möglich) in eine Summe bekannter Teilfunktionen zu überführen! Dies kann in diesem Beispiel auf zwei Wegen geschehen:

<u>Polynomdivision</u>

$$\begin{array}{l} (\quad x) : (x+1) = 1 + \dfrac{-1}{x+1} \\ \underline{-x-1} \\ \quad -1 \end{array}$$

<u>Addition von 0</u>

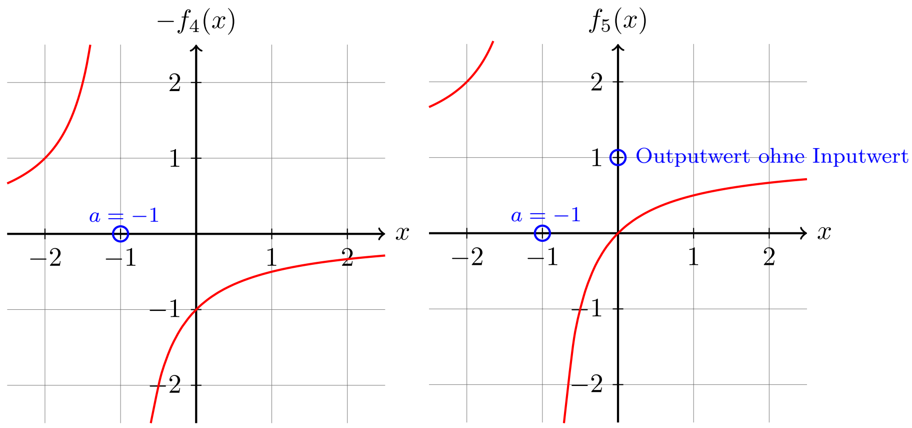
$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} &= \frac{1+x-1}{1+x} \\ &= \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Wir stellen fest:

$$f_5(x) = -\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{=f_4(x)} + 1 = -f_4(x) + 1$$

Skizze der Funktion

Die erste der beiden Skizzen zeigt die Funktion $-f_4$. Das „-1“ bewirkt eine Spiegelung der bekannten Funktion f_4 an der x-Achse. Verschiebt man die Funktion zusätzlich um „1“ nach oben, erhält man schließlich den Funktionsgraphen zu f_5.



An der Skizze lässt sich sofort ablesen, dass die Funktion für $W_5' := \mathbb{R} \setminus \{1\}$ bijektiv ist.

$\boxed{\textbf{ü1.a2}}$ f_6

Zerlegung der Funktion

Der Summand „$-x$“ stellt bereits eine Teilfunktion mit bekanntem Verlauf dar. Aus diesem Grund betrachten wir zunächst $\tilde{f}_6 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{f}_6(x) := \frac{x^2}{1+x}$. Es führen wieder (mindestens) zwei Wege zum Ziel:

<u>Polynomdivision</u>

$$
\begin{array}{l}
(\quad x^2) : (x+1) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \\
\underline{-\,x^2 - x} \\
\quad -\,x \\
\quad \underline{\;\; x + 1} \\
\qquad\quad 1
\end{array}
$$

<u>Addition von 0</u>

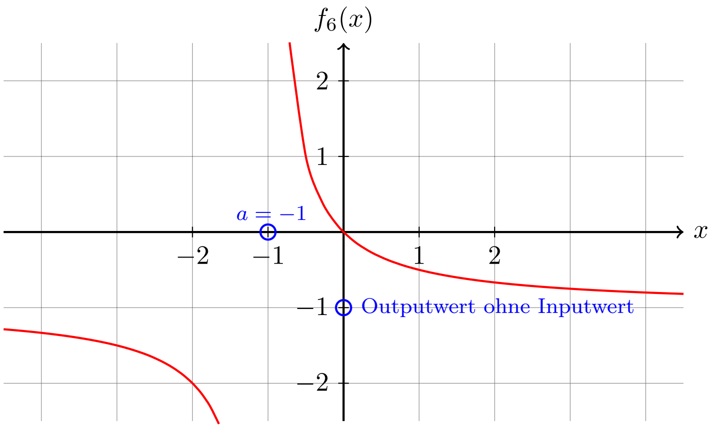
$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{1+x} &= \frac{1 + \overbrace{x^2 - 1}^{\text{3. binomische Formel}}}{1+x} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \\
&= \frac{1}{1+x} + x - 1
\end{aligned}
$$

Wir stellen also fest:

$$
f_6(x) = \tilde{f}_6(x) - x = -1 + \frac{1}{1+x} + \cancel{x - x} = (-1) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)}_{=f_5(x)}
$$

Skizze der Funktion

Das Skizzieren des Funktionsverlaufs ist sofort möglich, denn aus obiger Zerlegung folgt: $f_6 = -f_5$ ($\Rightarrow$ f_5 an der x-Achse spiegeln)



Die Funktion ist für $W_6' := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ bijektiv.